

6.2.4 Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Předpoklady: 6203

Pedagogická poznámka: Tato hodina vyžaduje spíše jeden a půl vyučovací hodiny

Máme dvě komplexní čísla v algebraickém tvaru: $z_1 = a + bi$

$$z_2 = c + di$$

Spočítáme jejich součin: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$

Jak to bude součin vypadat v goniometrickém tvaru?

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] =$$

$$= r_1 \cdot r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)]$$

Vzpomínka na goniometrii:

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Pro součin dvou libovolných komplexních čísel z_1 a z_2 v goniometrickém tvaru platí vzorec:

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Př. 1: Urči v goniometrickém tvaru součin $z_1 \cdot z_2$ čísel $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ a

$z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$. Výsledek převed' i do algebraického tvaru.

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi \right) \right] =$$

$$= 6(\cos \pi + i \sin \pi) = 6(-1 + 0) = -6$$

Př. 2: Urči v goniometrické tvaru součin $z_1 \cdot z_2$ čísel:

a) $z_1 = 0,5 \left(\cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right)$ a $z_2 = 4 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)$

b) $z_1 = \sqrt{6} (\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)$ a $z_2 = \sqrt{2} (\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$

a)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 0,5 \left(\cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right) \cdot 4 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right) = \\ &= 2 \left[\cos \left(\frac{11}{6} \pi + \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left(\frac{11}{6} \pi + \frac{2}{3} \pi \right) \right] = 2 \left(\cos \frac{15}{6} \pi + i \sin \frac{15}{6} \pi \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{5}{2} \pi + i \sin \frac{5}{2} \pi \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt{6} (\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ) \cdot \sqrt{2} (\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ) = \\ &= 2\sqrt{3} [\cos (310^\circ + 140^\circ) + i \sin (310^\circ + 140^\circ)] = \\ &= 2\sqrt{3} (\cos 450^\circ + i \sin 450^\circ) = 2\sqrt{3} (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) \end{aligned}$$

Př. 3: Převed' čísla $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ a $z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right)$ na

algebraický tvar a v algebraickém tvaru je vynásob. Srovnej výsledek s výsledkem příkladu 1.

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

$$z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) = 3\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -3 + 3i$$

$$z_1 z_2 = (1 + i)(-3 + 3i) = -3 + 3i - 3i + 3i^2 = -6$$

Stejný výsledek jako u příkladu 1.

Př. 4: Zobecní vzorec pro součin v goniometrickém tvaru pro větší počet činitelů (komplexní čísla $z_1; z_2; \dots; z_n$). Odvod' vzorec pro podíl v goniometrickém tvaru.

Řešení viz. následující výklad.

Vzorec pro součin v goniometrickém tvaru je možné zobecnit pro větší počet činitelů:

Pro všechna komplexní čísla $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$,
 $\dots, z_n = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$ platí:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)]$$

Pedagogická poznámka: Odvození vzorce pro násobení nechávám většinou na studentech.
Vzorec pro podíl pak promítám z počítače, aby vybyl čas na počítání příkladů.

Jak je to s dělením?

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) & z_2 &= r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \cdot \frac{(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)]}{\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2]}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}{1} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

Opět použijeme goniometrii:

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Pro podíl dvou libovolných komplexních čísel z_1 a z_2 v goniometrickém tvaru

platí vzorec:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Př. 5: Urči v goniometrickém tvaru podíl $\frac{z_1}{z_2}$ čísel $z_1 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$ a

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right). \text{ Výsledek převed' i do algebraického tvaru.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] =$$

$$3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3(0 + i) = 3i$$

Př. 6: Urči v goniometrickém tvaru podíl $\frac{z_1}{z_2}$ čísel:

a) $z_1 = 4 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)$ a $z_2 = 2 \left(\cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right)$

b) $z_1 = \sqrt{6} (\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)$ a $z_2 = \sqrt{2} (\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)}{2 \left(\cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right)} = \frac{4}{2} \left[\cos \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{11}{6} \pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{11}{6} \pi \right) \right] = \\ &= 2 \left[\cos \left(-\frac{7}{6} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{7}{6} \pi \right) \right] = 2 \left(\cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{6} (\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)}{\sqrt{2} (\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \left[\cos (310^\circ - 140^\circ) + i \sin (310^\circ - 140^\circ) \right] = \\ &= \sqrt{3} (\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ) \end{aligned}$$

Př. 7: Převed' čísla $z_1 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right)$ a $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ na algebraický tvar a v algebraickém tvaru je vyděl. Výsledek srovnej s výsledkem příkladu 5.

$$z_1 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) = 3\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -3 + 3i$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 + 3i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{-3 + 3i + 3i - 3i^2}{1 + 1} = \frac{6i}{2} = 3i$$

Stejný výsledek jako u příkladu 5.

Př. 8: Vyjádři v goniometrickém tvaru $\frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi}$.

Číslo není v goniometrickém tvaru, je ve jmenovateli zlomku $\Rightarrow$ převedeme čítelel do goniometrického tvaru a použijeme vzorec pro dělení v goniometrickém tvaru:

$$\frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = 1 \left[\cos (0 - \varphi) + i \sin (0 - \varphi) \right] = \cos (-\varphi) + i \sin (-\varphi)$$

Dobré na zapamatování: $\frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos (-\varphi) + i \sin (-\varphi)$

Př. 9: Urči součin komplexních čísel: $z_1 = \frac{1}{\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi}$, $z_2 = \frac{1}{\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi}$,

$$z_3 = \frac{1}{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi}.$$

Nemůžeme použít vzorec pro součin v goniometrickém tvaru, čísla v něm nejsou zadaná $\Rightarrow$ převedeme na goniometrický tvar pomocí předchozího vzorce.

$$z_1 = \frac{1}{\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi} = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi} = \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi} = \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= \left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right] \left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \right] \left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) \right] = \\ &= \cos\left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{6}\pi\right) = \\ &= \cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \\ &= \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \end{aligned}$$

Př. 10: Zapiš v goniometrickém tvaru číslo:

$$z = \left(\cos \varphi - i \sin \varphi + \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right) \cdot (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

Nejdřív si upravíme závorku:

$$\begin{aligned} \left(\cos \varphi - i \sin \varphi + \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right) &= \left[\frac{(\cos \varphi - i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi) + 1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right] = \\ &= \left(\frac{\cos^2 \varphi + i \cos \varphi \sin \varphi - i \cos \varphi \sin \varphi - i^2 \sin^2 \varphi + 1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right) = \left(\frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right) \\ &= \frac{2}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = 2 [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] \end{aligned}$$

Dosadíme:

$$\begin{aligned}
 z &= \left(\cos \varphi - i \sin \varphi + \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right) \cdot (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \\
 &= 2 \left[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) \right] \cdot (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = 2 \left[\cos(2\varphi - \varphi) + i \sin(2\varphi - \varphi) \right] = \\
 &= 2(\cos \varphi + i \sin \varphi)
 \end{aligned}$$

Př. 11: Vyjádři v goniometrickém tvaru:

$$\text{a) } \frac{\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi}{2i}$$

$$\text{b) } (1+i) \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$\text{c) } \frac{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi}{\sqrt{3} - i}$$

$$\text{a) } \frac{\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi}{2i}$$

Převědeme jmenovatel na goniometrický tvar: $2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$

$$\frac{\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi}{2i} = \frac{\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi}{2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \frac{4}{6}\pi + i \sin \frac{4}{6}\pi \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$\text{b) } (1+i) \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

Převědeme čítelel na goniometrický tvar: $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow$

$$(1+i) \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \right) \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi \right)$$

$$\text{c) } \frac{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi}{\sqrt{3} - i}$$

Převědeme jmenovatel na goniometrický tvar: $\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) \Rightarrow$

$$\frac{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi}{\sqrt{3} - i} = \frac{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi}{2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5}{6}\pi - \frac{11}{6}\pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{6}\pi - \frac{11}{6}\pi \right) \right] =$$

$$= 0,5 \left[\cos \left(-\frac{6}{6}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{6}{6}\pi \right) \right] = 0,5 \left[\cos(-\pi) + i \sin(-\pi) \right] = 0,5 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Shrnutí: V goniometrické tvaru můžeme komplexní čísla snadno násobit i dělit.